VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

4.1.4. Ecuația de mişcare: forțe dinamice

Răspunsul dinamic al unui sistem cu mai multe grade de libertate dinamică (MGLD) acționat de forțe dinamice este alcătuit din deplasările $u_j(t)$, vitezele $\dot{u}_j(t)$ şi accelerațiile $\ddot{u}_j(t)$, *j*=1...N. Forțele dinamice $\{p(t)\}$ pot fi considerate distribuite la componenta de rigiditate $\{f_S(t)\}$, componenta de amortizare $\{f_D(t)\}$ şi componenta de masă $\{f_I(t)\}$ (vezi Figura 4.8):

$$\{f_I(t)\}+\{f_D(t)\}+\{f_S(t)\}=\{p(t)\} \tag{4.11}$$

Înlocuind ecuațiile (4.3), (4.6) şi (4.9) în ecuația (4.11) obținem:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{p(t)\} \tag{4.12}$$

ceea ce reprezintă un sistem de *N* ecuații diferențiale, rezolvarea căruia duce la determinarea deplasărilor $\{u(t)\}$ generate de acțiunea dinamică $\{p(t)\}$. Ecuația (4.12) reprezintă echivalentul MGLD al ecuației (2.6) determinată pentru un sistem SGLD.

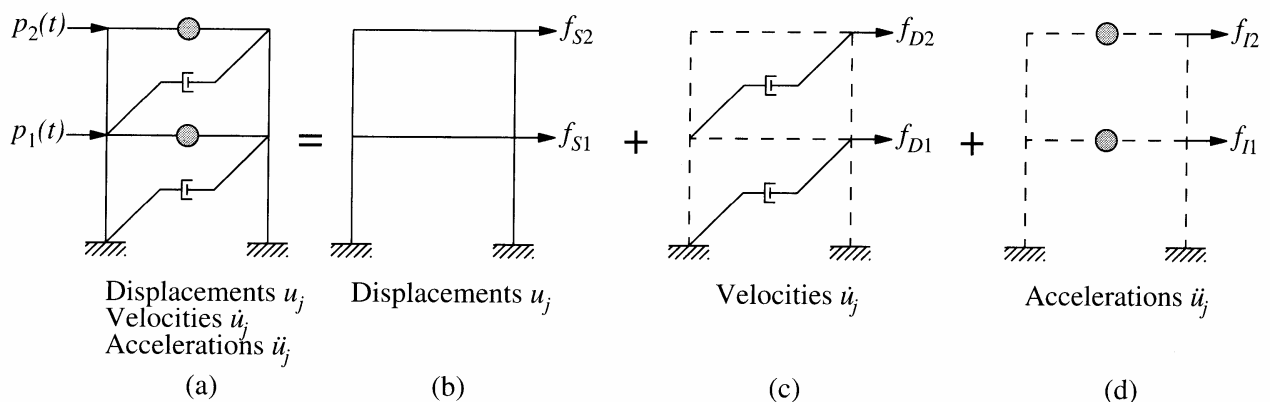


Figura 4.8. Sistemul MGLD complet (a), componenta de rigiditate (b), cea de amortizare (c) şi de masă (d), Chopra, 2001.

4.1.5. Ecuația de mişcare: acțiunea seismică

Pentru un număr mare de structuri inginereşti toate gradele de libertate dinamică sunt deplasări în aceiaşi direcție cu mişcare seismică. Două astfel de structuri, un cadru multietajat şi un turn, sunt prezentate în Figura 4.9. Deplasarea terenului este notată cu u_g, deplasarea totală a masei m_i cu u_j^t, iar deplasarea relativă între această masă şi teren cu u_j. Aceste deplasări sunt raportate prin următoarea relație:

$$u_j^t(t)=u_j(t)+u_g(t) \tag{4.13}$$

Toate cele N astfel de ecuații formulate pentru fiecare masă pot fi combinate în forma vectorială:

$$\{u_j^t(t)\}=\{u_j(t)\}+u_g(t)\{1\} \tag{4.14}$$

unde $\{1\}$ este un vector unitate.

Ecuația (4.11) derivată pentru cazul unor forțe dinamice este valabilă în continuare, dar în cazul mişcării terenului forțele dinamice $\{p(t)\}=0$, deoarece nu există forțe dinamice aplicate maselor structurii:

$$\{f_I(t)\}+\{f_D(t)\}+\{f_S(t)\}=\{0\} \tag{4.15}$$

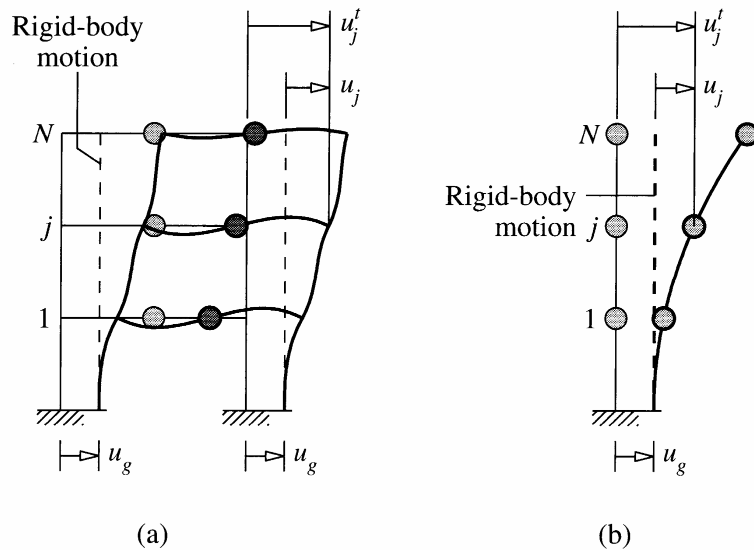


Figura 4.9. Schematizarea a două sisteme MGLD: un cadru multietajat (a) şi un turn (b), Chopra, 2001.

Ținând cont de faptul că pe de o parte, doar deformațiile relative u_j^t produc forțe elastice $\{f_S(t)\}$ şi de amortizare $\{f_D(t)\}$, iar pe de altă parte forțele de inerție $\{f_I(t)\}$ sunt generate de deplasările totale ale maselor, ecuația (4.15) devine:

$$[m]\{\ddot{u}^t\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{0\} \tag{4.16}$$

care, ținând conte de ecuația (4.13) devine:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=-[m]\{1\}\ddot{u}_g(t) \tag{4.17}$$

Relația (4.17)reprezintă N ecuații diferențiale. Rezolvând acest sistem de ecuații se pot determina deplasările relative $u_j(t)$ ale sistemului MGLD sub acțiunea accelerației terenului $u_g(t)$. Matricea de rigiditate $[k]$ se referă doar la deplasările orizontale u_j şi se poate obține prin condensare statică (vezi Chopra, 2001), pentru a elimina gradele de libertate corespunzătoare deplasărilor verticale şi a rotirilor de noduri. Din această cauză, matricea [k] este cunoscută sub denumirea de matrice de rigiditate laterală. Cu toate acestea, în analiza statică a structurii se va folosi matricea de rigiditate completă a structurii.

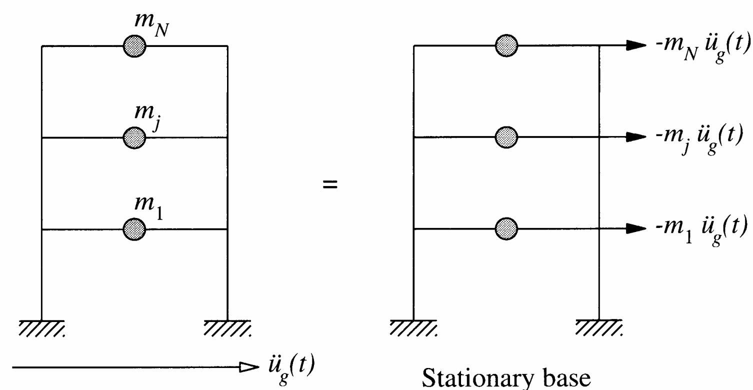


Figura 4.10. Forțe seismice efective (Chopra, 2001).

Comparația ecuațiilor (4.12) şi (4.17) indică faptul că ecuația de mişcare pentru acțiunea seismică (accelerația $\ddot{u}_g(t)$ aplicată terenului) este echivalentă ecuației de mişcare forțe dinamice egale cu

$-m_j\ddot{u}_g(t)$ aplicate maselor (vezi Figura 4.10). Astfel, mişcarea terenului poate fi înlocuită cu forțe seismice efective:

$$\{p_{eff}(t)\} = -[m]\{1\}\ddot{u}_g(t) \tag{4.18}$$

Ecuația de mişcare (4.17) este valabilă numai pentru cazul în care toate gradele de libertate dinamice ale structurii sunt deplasări orizontale în aceeaşi direcție cu mişcarea seismică. Valabilitatea acestei ecuații mai este limitată şi de ipoteza că toate reazemele structurii se deplasează în fază, adică nu există deplasări relative între reazemele structurii. Această ultimă ipoteză este rezonabilă pentru majoritatea structurilor inginereşti. Mişcarea diferențiată a reazemelor structurii poate fi necesară pentru structurile cu deschideri foarte mari.

4.2. Vibrații libere ale sistemelor MGLD

4.2.1. Moduri proprii de vibrație ale sistemelor MGLD neamortizate

În cazul vibrațiilor libere neamortizate ecuația de mişcare (4.12) pentru sisteme MGLD devine:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \tag{4.19}$$

Ecuația (4.19) reprezintă un sistem de N ecuații diferențiale omogene, unde N este numărul de GLD. Cunoscând condițiile inițiale:

$$\{u\} = \{u(0)\} \qquad \{\dot{u}\} = \{\dot{u}(0)\} \tag{4.20}$$

la timpul t=0 se poate determina soluția ecuației (4.19) $u(t)$.

Figura 4.11 prezintă grafic vibrațiile libere neamortizate ale unui cadru cu două nivele. Vibrațiile sunt inițiate de deplasările inițiale reprezentate prin curba a din Figura 4.11b, viteza inițială fiind zero. Răspunsul în timp al deplasărilor u_j celor două mase este reprezentat în Figura 4.11d, iar deformata structurii la timpul a, b şi c în Figura 4.11b. Cu toate că răspunsul în timp al celor două mase reprezintă o mişcare periodică, spre deosebire de oscilațiile libere neamortizate ale sistemelor SGLD, răspunsul în timp al deplasării celor două mase ale sistemului MGLD nu este o mişcare armonică. În plus, deformata structurii (raportul u_1/u_2) variază în timp, aspect care este evident din observația deformatei structurii la timpul a, b şi c.

Cu toate acestea, pentru o distribuție corespunzătoare a deplasărilor inițiale, oscilațiile libere neamortizate ale unui sistem SGLD pot fi armonice, fără modificarea deformatei structurii (raportului u_1/u_2). După cum se poate observa din Figura 4.12 şi Figura 4.13, pentru sistemul cu două grade de libertate există două astfel de distribuții ale deplasărilor inițiale. Ambele deplasări ating valoarea maximă la acelaşi timp şi trec prin poziția de echilibru în acelaşi timp. Fiecare dintre cele două forme deformate poartă numele de **moduri proprii de vibrație** ale unui sistem MGLD şi se notează prin $\{\phi_n\}$. Se poate observa că deplasările celor două mase sunt în acelaşi sens în primul mod propriu de vibrație (sau modul fundamental de vibrație - Figura 4.12), dar au sensuri opuse în ce de-al doilea mod propriu de vibrație (Figura 4.13). Punctul de inflexiune se numeşte nod, iar numărul de noduri creşte odată cu creşterea numărului modului propriu de vibrație.

Perioada proprie de vibrație T_n a unui sistem MGLD reprezintă timpul necesar efectuării unei oscilații complete în unul din modurile proprii de vibrație. Fiecărei perioade proprii T_n de vibrație îi vor corespunde o pulsație proprie de vibrații ω_n şi o frecvență proprie de vibrație f_n, vezi relațiile (2.20) şi (2.21). Fiecărei perioade proprii de vibrație T_n îi corespunde un mod propriu de vibrație $\phi_n = \{\phi_{1n} \quad \phi_{2n}\}^T$, n=1, 2. Modul propriu de vibrație căruia îi corespunde perioada mai mare, respectiv pulsația mai mică are indicele 1 şi se numeşte **modul fundamental de vibrație**.

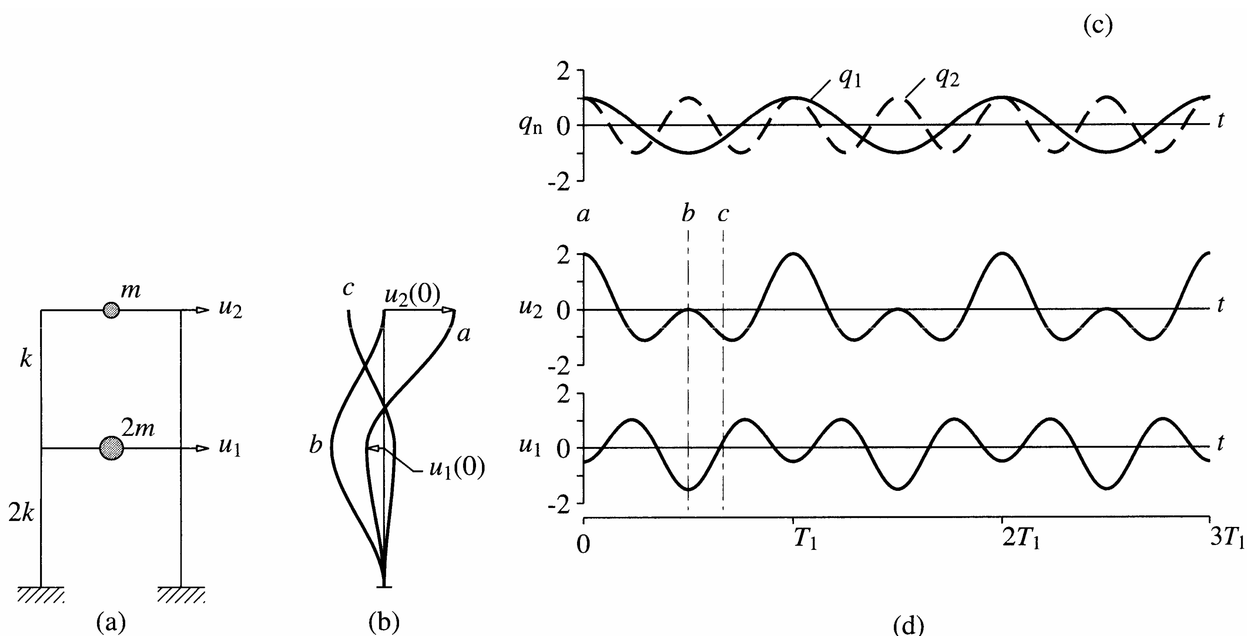


Figura 4.11. Vibrații libere ale unui sistem neamortizat: un cadru cu 2 GLD (a); deformata structurii la timpul *a*, *b* şi *c* (b); coordonatele modale $q_n(t)$ (c); răspunsul în timp al deplasării (d), Chopra, 2001.

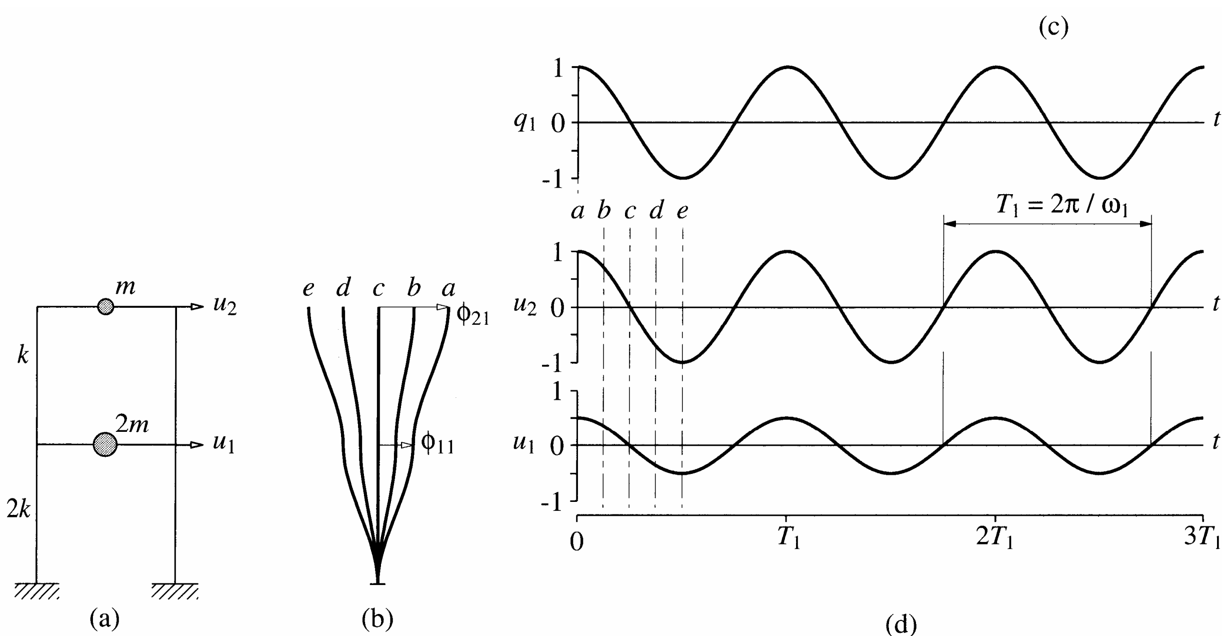


Figura 4.12. Vibrații libere ale unui sistem neamortizat în 1-ul mod propriu de vibrație (modul fundamental): un cadru cu 2 GLD (a); deformata structurii la timpul *a*, *b*, *c*, *d* şi *e* (b); coordonata modală $q_1(t)$ (c); răspunsul în timp al deplasării (d), Chopra, 2001.

Reprezentarea grafică din Figura 4.12 şi Figura 4.13 a răspunsului în deplasarea a unui sistem MGLD ca urmare a unor oscilații libere neamortizate poate fi exprimată matematic pentru modul propriu de vibrație n prin:

$$\{u(t)\}_n = q_n(t)\{\phi\}_n \tag{4.21}$$

Deformata $\{\phi\}_n$ nu variază în timp, iar variația în timp a deplasărilor este dată de o funcție armonică:

$$q_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \tag{4.22}$$

unde A_n şi B_n sunt constante de integrare care pot fi determinate cunoscând condițiile inițiale. Combinând ecuațiile (4.21) şi (4.22) obținem:

$$\{u(t)\}_n = \{\phi\}_n \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right) \tag{4.23}$$

unde ω_n şi $\{\phi\}_n$ sunt necunoscute. Înlocuind relația (4.23) în ecuația de mişcare (4.19) obținem:

$$\left[-\omega_n^2 [m]\{\phi\}_n + [k]\{\phi\}_n\right] q_n(t) = \{0\} \tag{4.24}$$

Această ecuație are două soluții. Prima soluție corespunde $q_n(t)=0$ ceea ce implică $\{u(t)\}_n = \{0\}$, adică sistemul nu oscilează (soluția banală). Cea de-a două soluție se obține pentru:

$$[k]\{\phi\}_n = \omega_n^2 [m]\{\phi\}_n \tag{4.25}$$

sau

$$\left([k] - \omega_n^2 [m]\right)\{\phi\}_n = \{0\} \tag{4.26}$$

care se numeşte **problema de valori proprii** şi conduce la determinarea scalarilor ω_n şi a vectorilor $\{\phi\}_n$. Ecuația (4.26)are soluții nenule pentru:

$$\det\left([k] - \omega_n^2 [m]\right) = 0 \tag{4.27}$$

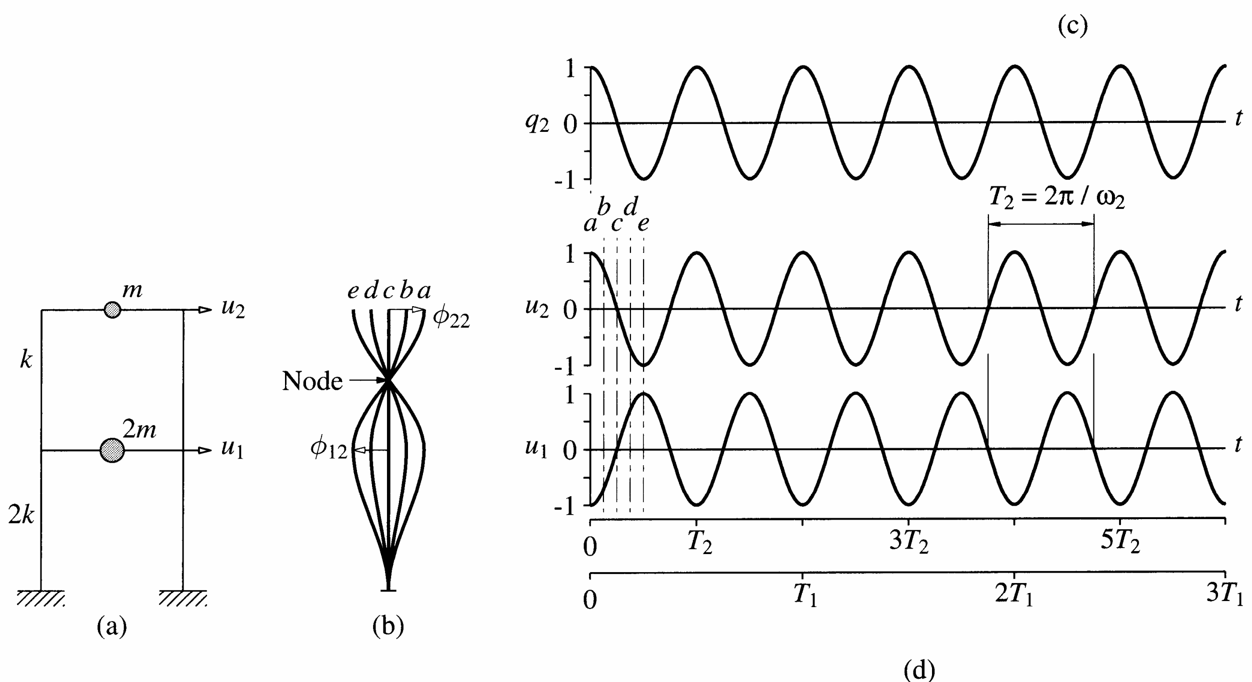


Figura 4.13. Vibrații libere ale unui sistem neamortizat în al 2-lea mod propriu de vibrație: un cadru cu 2 GLD (a); deformata structurii la timpul a, b, c, d şi e (b); coordonata modală $q_2(t)$ (c); răspunsul în timp al deplasării (d), Chopra, 2001.

Prin dezvoltarea determinantului se obține un polinom de ordinul N funcție de ω_n^2 cunoscut sub neumele de **ecuație caracteristică**. Această ecuație are N rădăcini reale şi pozitive pentru ω_n^2, care se numesc **valori proprii**. Odată cunoscute valorile proprii ω_n^2, se pot determina cei N vectori proprii corespunzători $\{\phi\}_n$, cunoscuți sub denumirea de **moduri proprii**. Rezolvând problema de valori proprii nu se obțin amplitudinile absolute ale vectorilor $\{\phi\}_n$, ci doar valori relative ale celor N deplasări ϕ_{jn} (j=1…N), adică doar forma deformatei modale.

Cele N valori proprii şi cele N moduri proprii pot fi reprezentate compact în formă vectorială. Astfel, modul propriu $\{\phi\}_n$ corespunzător pulsației ω_n are elementele ϕ_{jn} (j=1…N), unde j reprezintă gradele de libertate. Cele N moduri proprii pot fi reprezentate matriceal sub forma:

$$[\Phi] = \{\{\phi\}_1 \quad \cdots \quad \{\phi\}_n\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Matricea [Φ] se numeşte **matricea modală** a problemei de valori proprii. Cele N valori proprii ω_n^2 pot fi asamblate într-o matrice diagonală [Ω^2], care se numeşte **matricea spectrală** a problemei de valori proprii:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Folosind notațiile (4.28) şi (4.29), ecuația (4.25) se poate scrie în formă compactă sub forma:

$$[k][\Phi] = [m][\Phi][\Omega^2] \tag{4.30}$$

4.2.2. Ortogonalitatea modurilor proprii

Modul propriu n satisface ecuația (4.25). Înmulțind această relație la stânga cu $\{\phi\}_r^T$ ($r \neq n$) obținem:

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_n = \omega_n^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_n \tag{4.31}$$

Similar, modul propriu r satisface ecuația (4.25). Înmulțind relația corespunzătoare modului r la stânga cu $\{\phi\}_n^T$ obținem:

$$\{\phi\}_n^T [k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_r \tag{4.32}$$

Transpusa unei matrice simetrice este egală cu ea însăşi. Folosind această proprietate a matricelor simetrice de masă şi rigiditate, şi calculând transpusa relației (4.31) obținem:

$$\{\phi\}_n^T [k]\{\phi\}_r = \omega_n^2 \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_r \tag{4.33}$$

Făcând diferența dintre ecuațiile (4.33) şi (4.32), obținem:

$$\left(\omega_n^2 - \omega_r^2\right)\{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_r = 0 \tag{4.34}$$

Astfel, pentru $\omega_n^2 \neq \omega_r^2$, care pentru sisteme cu pulsații pozitive implică $\omega_n \neq \omega_r$ conduce la relația:

$$\{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_r = 0 \qquad \omega_n \neq \omega_r \tag{4.35}$$

Înlocuind ecuația (4.35) în relația (4.32) rezultă:

$$\{\phi\}_n^T [k]\{\phi\}_r = 0 \qquad \omega_n \neq \omega_r \tag{4.36}$$

Relațiile (4.35) şi (4.36) demonstrează proprietatea de ortogonalitate a modurilor proprii de vibrație.

Ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație implică faptul că următoarele matrice sunt diagonale:

$$[K] \equiv [\Phi]^T [k][\Phi] \qquad [M] \equiv [\Phi]^T [m][\Phi] \tag{4.37}$$

unde elementele diagonale sunt:

$$K_n = \{\phi\}_n^T [k]\{\phi\}_n \qquad M_n = \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n \tag{4.38}$$

Deoarece matricele [m] şi [k] sunt pozitive, elementele de pe diagonalele matricelor [M] şi [K] sunt de asemenea pozitive. Elementele celor două matrice se raportează prin:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \tag{4.39}$$

Această relație poate fi demonstrată înlocuind expresia (4.25) în definiția (4.38)a.

Una dintre interpretările fizice ale ortogonalității modurilor proprii de vibrație este că lucrul mecanic efectuat de forțele de inerție din modul propriu n pe deplasările din modul propriu r este egal cu zero. Pentru a demonstra cele enunțate anterior, să considerăm deplasările unei structuri care vibrează în modul propriu n:

$$\{u(t)\}_n = q_n(t)\{\phi\}_n \tag{4.40}$$

Accelerațiile corespunzătoare se obțin prin derivarea deplasărilor $\ddot{u}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\phi_n$,iar acestora le corespund forțele de inerție:

$$\{f_I\}_n = -[m]\{\ddot{u}(t)\}_n = -[m]\{\phi\}_n \ddot{q}_n(t) \tag{4.41}$$

Deplasările structurii în modul propriu r sunt:

$$\{u(t)\}_r = q_r(t)\{\phi\}_r \tag{4.42}$$

Lucrul efectuat de forțele de inerție date de relația (4.41) pe deplasările date de relația (4.42) este:

$$\{f_I\}_n^T \{u(t)\}_r = -\left(\{\phi\}_n^T [m]\{\phi_r\}\right)\ddot{q}_n(t) q_r(t) \tag{4.43}$$

care este egal cu zero în virtutea relației de ortogonalitate (4.35).

O altă interpretare fizică a ortogonalității modurilor proprii de vibrație este că lucrul mecanic efectuat de forțele statice echivalente din modul propriu n pe deplasările din modul propriu r este egal cu zero. Forțele statice echivalente din modul propriu n sunt:

$$\{f_S\}_n = [k]\{u(t)\}_n = [k]\{\phi\}_n q_n(t) \tag{4.44}$$

iar lucrul mecanic al acestora pe deplasările din modul r este:

$$\{f_S\}_n^T \{u(t)\}_r = \left(\{\phi\}_n^T [k]\{\phi_r\}\right) q_n(t) q_r(t) \tag{4.45}$$

care este egal cu zero datorită relației de ortogonalitate (4.36).

4.2.3. Normalizarea modurilor

Rezolvarea problemei de valori proprii (4.25) duce la determinarea vectorilor proprii. Se cunosc însă doar valorile relative ale elementelor acestor vectori. Orice alt vector proporțional cu $\{\phi\}_n$ va satisface ecuația (4.25). Pentru a standardiza modurile proprii de vibrație, acestea se normalizează. Uneori normalizarea poate consta în egalarea valorii maxime a unui mod propriu cu unitatea. Alteori poate fi avantajos egalarea valorii corespunzătoare unui anume GLD (de exemplu deplasarea laterală la ultimul nivel al unei structuri multietajate) cu unitatea. În aplicațiile teoretice şi aplicațiile în programe de calcul este uzual normalizarea modurilor proprii astfel ca M_n să aibă valori unitare:

$$M_n = \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n = 1 \qquad [\Phi]^T [m][\Phi] = [I] \tag{4.46}$$

unde [I] este matricea unitate. Ecuația (4.46) indică faptul că modurile proprii obținute în acest mod sunt nu doar ortogonale, ci şi normalizate față de matricea [m]. Astfel de moduri proprii se numesc **ortonormale**. În acest caz relațiile (4.38)a şi (4.37)a devin:

$$K_n = \{\phi\}_n^T [k]\{\phi\}_n = \omega_n^2 M_n = \omega_n^2 \qquad [K] = [\Phi]^T [k][\Phi] = \left[\Omega^2\right] \tag{4.47}$$

4.2.4. Dezvoltarea modală a deplasărilor

Orice set de N vectori independenți poate fi folosit pentru reprezentarea unui alt vector de ordinul N. Modurile proprii pot fi folosite pe postul unor astfel de vectori independenți. Dezvoltarea modală a unui vector arbitrar $\{u\}$ este de forma:

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi\}_r q_r = [\Phi]\{q\} \tag{4.48}$$

unde q_r sunt valori scalare denumite coordonate modale, iar $\{q\} = \{q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n\}^T$. Atunci când se cunosc modurile proprii $\{\phi\}_r$, pentru un vector $\{u\}$ dat, se pot determina coordonatele modale q_r multiplicând ambele părți ale ecuației (4.48) cu $\{\phi\}_n^T [m]$:

$$\{\phi\}_n^T [m]\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_r q_r \tag{4.49}$$

Ca urmare a proprietății de ortogonalitate (4.35), toți termenii sumei sunt egali cu zero, cu excepția celor corespunzători $r=n$. Astfel:

$$\{\phi\}_n^T [m]\{u\} = \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n q_n \tag{4.50}$$

Ambele produse fiind valori scalare, se poate scrie:

$$q_n = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{u\}}{\{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n} = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{u\}}{M_n} \tag{4.51}$$

4.2.5. Soluția ecuației de mişcare

Determinarea răspunsului dinamic al unui sistem neamortizat care oscilează liber este obținut rezolvând ecuația de mişcare (4.19) cunoscând condițiile inițiale (4.20). S-a arătat că rezolvarea ecuației de mişcare a condus la problema de valori proprii (4.25). Presupunând această problemă rezolvată şi cunoscând pulsațiile şi vectorii proprii, soluția generală a ecuației de mişcare (4.19) se poate determina prin suprapunerea răspunsului individual în fiecare mod propriu dat de ecuația (4.23):

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right) \tag{4.52}$$

unde A_n şi B_n sunt $2N$ constante de integrare. Pentru determinarea acestora este nevoie de expresia vectorului vitezelor:

$$\{\dot{u}(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n \omega_n \left(-A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\right) \tag{4.53}$$

Pentru $t=0$ ecuațiile (4.52) şi (4.53) devin:

$$\{u(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n A_n \qquad \{\dot{u}(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n \omega_n B_n \tag{4.54}$$

Cunoscând deplasările şi vitezele inițiale $\{u(0)\}$ şi $\{\dot{u}(0)\}$, fiecare din ecuațiile (4.54) reprezintă un sistem de N ecuații algebrice liniare cu necunoscutele A_n, respectiv B_n. Însă rezolvarea simultană a acestor ecuații nu este necesară, deoarece acestea pot fi interpretate ca şi o dezvoltare modală a vectorilor $\{u(0)\}$ şi $\{\dot{u}(0)\}$. Folosind ecuația (4.48), se poate scrie:

$$\{u(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n q_n(0) \qquad \{\dot{u}(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n \dot{q}_n(0) \tag{4.55}$$

unde, analogic relației (4.51), coordonatele modale $q_n(0)$ şi $\dot{q}_n(0)$ sunt date de:

$$q_n(0) = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{u(0)\}}{M_n} \qquad \dot{q}_n(0) = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{\dot{u}(0)\}}{M_n} \tag{4.56}$$

Ecuațiile (4.54) şi (4.55) sunt echivalente, ceea ce implică $A_n = q_n(0)$ şi $B_n = \dot{q}_n(0)/\omega_n$. Înlocuind aceste expresii în relația (4.52) obținem:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n \left(q_n(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \right) \tag{4.57}$$

sau, alternativ:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n q_n(t) \tag{4.58}$$

unde

$$q_n(t) = q_n(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{4.59}$$

reprezintă variația în timp a coordonatelor modale, care sunt similare expresiei oscilațiilor libere neamortizate ale unui sistem SGLD. Ecuația (4.57) reprezintă soluția ecuației de mişcare în cazul oscilațiilor libere neamortizate ale unui sistem MGLD. Aceasta constă din vectorul deplasărilor $\{u\}$ care variază în timp şi se datorează deplasărilor inițiale $u(0)$ şi vitezelor inițiale $\dot{u}(0)$. Dacă se cunosc pulsațiile proprii ω_n şi vectorii proprii $\{\phi\}_n$, partea dreaptă a relației (4.57) este cunsocută, cu expresiile $q_n(0)$ şi $\dot{q}_n(0)$ date de (4.56).

4.2.6. Vibrații libere amortizate ale sistemelor MGLD

În cazul vibrațiilor libere amortizate ecuația de mişcare (4.12) pentru sisteme MGLD devine:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \tag{4.60}$$

Cunoscând condițiile inițiale:

$$\{u\} = \{u(0)\} \qquad \{\dot{u}\} = \{\dot{u}(0)\} \tag{4.61}$$

la timpul t=0 se poate determina soluția ecuației (4.60) $u(t)$.

Folosind ecuația (4.48) pentru a dezvolta deplasările $\{u\}$ în modurile proprii ale sistemului neamortizat şi înlocuind expresia acestor deplasări în ecuația (4.60) obținem:

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{0\} \tag{4.62}$$

Înmulțind la stânga cu $[\Phi]^T$ obținem:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \tag{4.63}$$

unde matricele $[M]$ şi $[K]$ sunt definite de relațiile (4.37), iar matricea $[C]$ este definită în mod similar:

$$[C] = [\Phi]^T [c][\Phi] \tag{4.64}$$

În general, matricea $[C]$ poate fi sau poate să nu fie o matrice diagonală. În primul caz modurile proprii ale sistemului amortizat sunt identice cu modurile proprii ale sistemului neamortizat, iar ecuația de mişcare poate fi rezolvată folosind metodele modale clasice. De aceea, aceste sisteme sunt denumite cu **amortizare clasică**. Majoritatea structurilor inginereşti pot fi încadrate în această categorie. Astfel, în cele ce urmează vor fi tratate doar sisteme MGLD cu amortizare clasică.

În Figura 4.14 sunt prezentate oscilațiile libere amortizate ale unui sistem cu două grade de libertate dinamică, generate de deplasările inițiale $\{u(0)\}$ proporționale cu primul mod propriu al sistemului neamortizat corespunzător. În Figura 4.15 sunt prezentate rezultate similare pentru

acelaşi sistem, oscilaţiile fiind generate de impunerea unor deplasări iniţiale $\{u(0)\}$ proporţionale cu cel de-al doilea mod propriu al sistemului neamortizat corespunzător. Rezultatele permit următoarele observaţii:

- pentru modul r, altul decât modul în care au fost introduse deplasările iniţiale, $q_r(t)=0$, ceea ce implică lipsa unui răspuns în alt mod de vibraţie
- deformata nu se modifică în timpul vibraţiilor libere amortizate, la fel ca şi în cazul vibraţiilor libere neamortizate (vezi Figura 4.12 şi Figura 4.13). Astfel, modul propriu al sistemului amortizat este identic cel al sistemul neamortizat - $\{\phi\}_n$
- deplasările celor două mase sunt similare cu cele ale sistemului neamortizat, dar amplitudinea oscilaţiilor scade cu fiecare ciclu din cauza amortizării
- răspunsul fiecărei mase este o mişcare armonică simplă, similar cu un sistem SGLD amortizat.

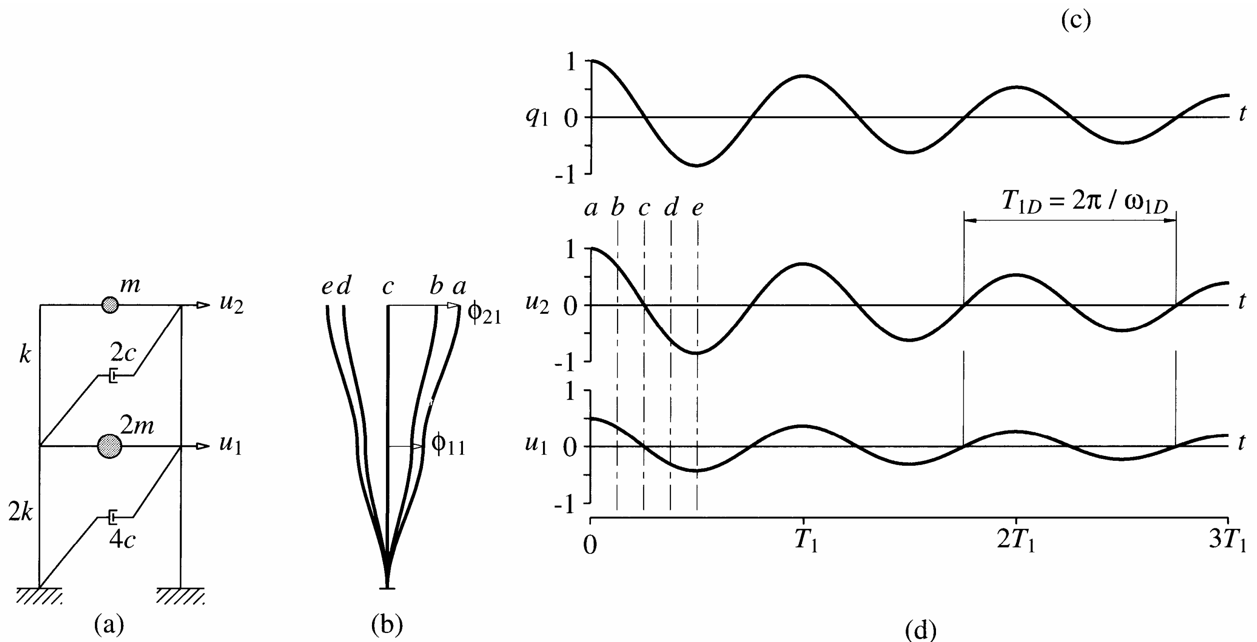


Figura 4.14. Vibraţii libere ale unui sistem amortizat în 1-ul mod propriu de vibraţie (modul fundamental): un cadru cu 2 GLD (a); deformata structurii la timpul a, b, c, d şi e (b); coordonata modală $q_1(t)$ (c); răspunsul în timp al deplasării (d), Chopra, 2001.

Pentru fiecare mod propriu de vibraţie n, ecuaţie de mişcare în coordonate modale este:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = 0 \tag{4.65}$$

unde scalarii M_n şi K_n sunt definiţi de (4.38), iar

$$C_n = \{\phi\}_n^T [c] \{\phi\}_n \tag{4.66}$$

Împărţind ecuaţia (4.65) la M_n obţinem:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \tag{4.67}$$

unde s-a notat:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} \tag{4.68}$$

Ecuaţia (4.67) are aceiaşi formă ca şi ecuaţia de mişcare (2.26) a unui sistem SGLD amortizat, soluţia căreia este dată de expresia (2.29). Adaptând acest rezultat, soluţia ecuaţiei (4.67) este dată de:

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}(0)+\zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\sin\omega_{nD}t\right] \tag{4.69}$$

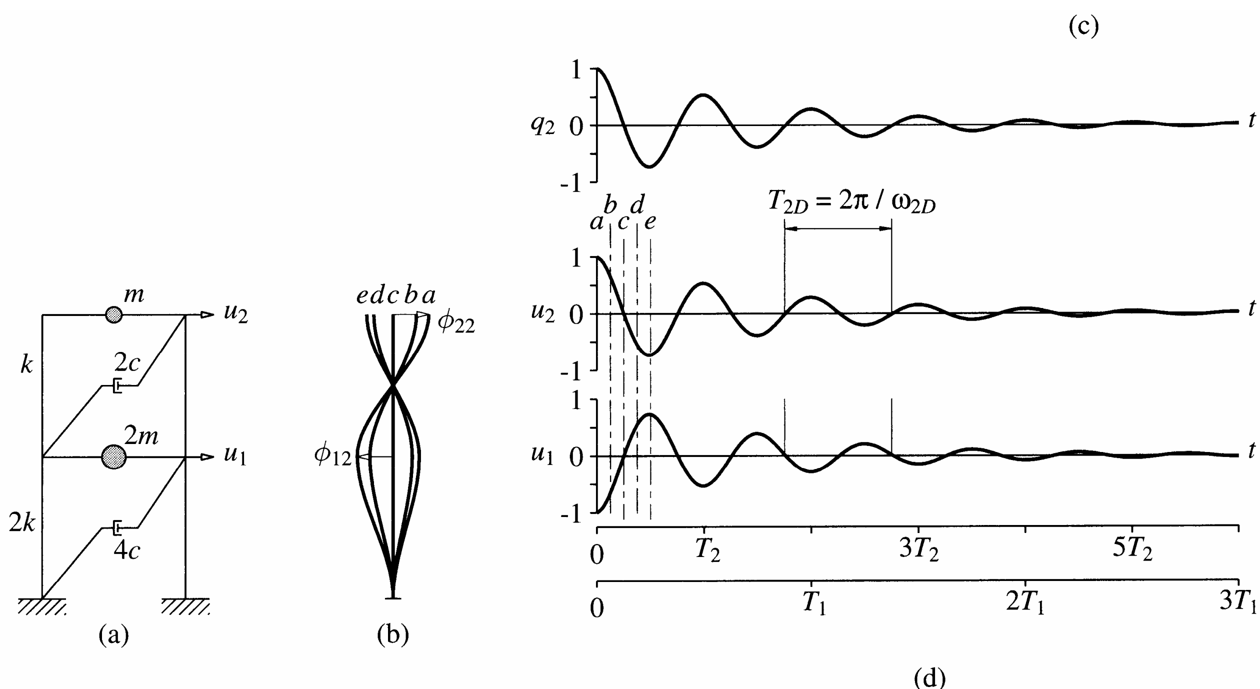


Figura 4.15. Vibrații libere ale unui sistem amortizat în al 2-lea mod propriu de vibrație: un cadru cu 2 GLD (a); deformata structurii la timpul *a*, *b*, *c*, *d* şi *e* (b); coordonata modală $q_2(t)$ (c); răspunsul în timp al deplasării (d), Chopra, 2001.

unde pulsația amortizată a modului propriu n este:

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1-\zeta_n^2} \tag{4.70}$$

Răspunsul în deplasare al sistemului se obține înlocuind expresia (4.69) în relația (4.58):

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}(0)+\zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin\omega_{nD}t \right] \tag{4.71}$$

Această expresie reprezintă soluția ecuației de mişcare pentru un sistem MGLD amortizat. Pentru a rezolva ecuația de mişcare a unui sistem MGLD amortizat sunt necesare cunoaşterea pulsațiilor ω_n şi a modurilor proprii $\{\phi\}_n$ ale sistemului neamortizat, precum şi a fracțiunilor din amortizarea critică ζ_n, iar expresiile $q_n(0)$ şi $\dot{q}_n(0)$ fiind date de (4.56).

Amortizarea afectează pulsațiile şi perioadele proprii de vibrație a unui sistem MGLD conform ecuației (4.70), similar unui sistem SGLD. De aceea, efectul amortizării asupra valorii pulsațiilor şi perioadelor proprii unui sistem MGLD este neglijabil pentru fracțiuni ale amortizării critice ζ_n<20%.

4.2.7. Amortizarea la sisteme MGLD

Determinarea analitică a amortizării structurilor inginereşti nu este fiabilă, din motive discutate în capitolul 2.1.3. Fracțiunea din amortizarea critică pentru diferite tipuri de structuri şi două nivele de solicitare sunt prezentate în Tabelul 4.1. Este de remarcat faptul că majoritatea normelor de proiectare seismică nu recunosc variația amortizării funcție de tipul de material şi nivelul eforturilor în structură, specificând în toate cazurile o fracțiune din amortizarea critică de 5%.

Să considerăm matricea de amortizare proporțională cu masa, respectiv rigiditatea:

$$[c] = a_0[m] \qquad [c] = a_1[k] \tag{4.72}$$

În ambele cazuri de mai sus matricea [C] dată de ecuația (4.64) este diagonală ca urmare a ortogonalității modurilor proprii. Astfel, ambele cazuri reprezintă o amortizare clasică.

Tabelul 4.1: Valori recomandate ale fracțiunii din amortizarea critică pentru diferite tipuri de structuri şi nivel de eforturilor (Newmark şi Hall, 1982; Chopra, 2001).

nivelul eforturilor	tipul de structură	ζ(%)
eforturi de maxim 0.5 din limita de curgere	structuri metalice sudate, structuri din beton precomprimat, structuri din beton armat puternic (fisuri limitate)	2-3
	structuri din beton armat cu fisuri semnificative	3-5
	structuri metalice îmbinate cu şuruburi sau nituite, structuri din lemn îmbinate cu şuruburi sau cuie	5-7
eforturi apropiate de limita de curgere	structuri metalice sudate, structuri din beton precomprimat (fără pierderea totală a precomprimării)	5-7
	structuri din beton precomprimat cu pierderea totală a precomprimării	7-10
	structuri din beton armat	7-10
	structuri metalice îmbinate cu şuruburi sau nituite, structuri din lemn îmbinate cu şuruburi	10-15
	structuri din lemn îmbinate cu cuie	15-20

În cazul amortizării proporționale cu masa, amortizarea generalizată în modul n, conform ecuației (4.66) este:

$$C_n = a_0 M_n \tag{4.73}$$

iar fracțiunea din amortizarea critică corespunzătoare modului n (vezi ecuația (4.68)):

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} \tag{4.74}$$

În acest caz amortizarea este invers proporțională cu pulsația proprie (vezi Figura 4.16a). Coeficientul a_0 poate fi determinat astfel ca să reprezinte fracțiunea din amortizarea critică dată într-un mod oarecare, de exemplu, ζ_i în modul i. Rezultă din ecuația (4.74):

$$a_0 = 2\zeta_i\omega_i \tag{4.75}$$

După ce se cunoaşte coeficientul a_0, matricea de amortizare se cunoaşte din ecuația (4.72)a, iar fracțiunea din amortizarea critică din orice alt mod, de exemplu modul n, este dată de (4.74).

În mod similar, fracțiunea din amortizarea critică poate fi raportată la coeficientul a_1 în cazul amortizării proporționale cu rigiditatea. În acest caz:

$$C_n = a_1\omega_n^2 M_n \qquad \zeta_n = \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{4.76}$$

în care s-au folosit ecuațiile (4.66), (4.38), (4.39) şi (4.74). Fracțiune din amortizarea critică creşte liniar cu pulsația proprie (vezi Figura 4.16a). Coeficientul a_1 poate fi determinat astfel ca să reprezinte fracțiunea din amortizarea critică dată într-un mod oarecare, de exemplu, ζ_j în modul j. Rezultă din ecuația (4.76):

$$a_1 = \frac{2\zeta_j}{\omega_j} \tag{4.77}$$

După ce se cunoaşte coeficientul a_1, matricea de amortizare se cunoaşte din ecuația (4.72)b, iar fracțiunea din amortizarea critică din orice alt mod, de exemplu modul n, este dată de (4.76)b.

Nici una dintre cele două tipuri de amortizare u sunt potrivite sistemelor MGLD, deoarece evidența experimentală indică fracțiuni din amortizarea critică similare pentru mai multe moduri proprii de vibrație. Una dintre soluție simplă a acestei probleme o constituie **amortizarea de tip Rayleigh**, care se obține prin combinarea amortizării proporționale cu masa şi a celei proporționale cu rigiditatea:

$$[c] = a_0[m] + a_1[k] \tag{4.78}$$

Fracțiunea din amortizarea critică în modul n pentru un astfel de model este:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{4.79}$$

Coeficienții a_0 şi a_1 pot fi determinați astfel ca să reprezinte fracțiunea din amortizarea critică dată în două moduri oarecare, de exemplu ζ_i şi ζ_j în modurile i şi j. Scriind ecuația (4.79) penru cele două moduri proprie în formă matriceală rezultă:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \tag{4.80}$$

Dacă se consideră aceiaşi fracțiune din amortizarea critică ζ în cele două moduri proprii, rezolvând ecuația (4.80) obținem:

$$a_0 = \zeta\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \qquad a_1 = \zeta\frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{4.81}$$

După ce se cunosc coeficienții a_0 şi a_1, matricea de amortizare se cunoaşte din ecuația (4.78), iar fracțiunea din amortizarea critică din orice alt mod, de exemplu modul n, este dată de (4.79) şi reprezentată grafic în Figura 4.16b.

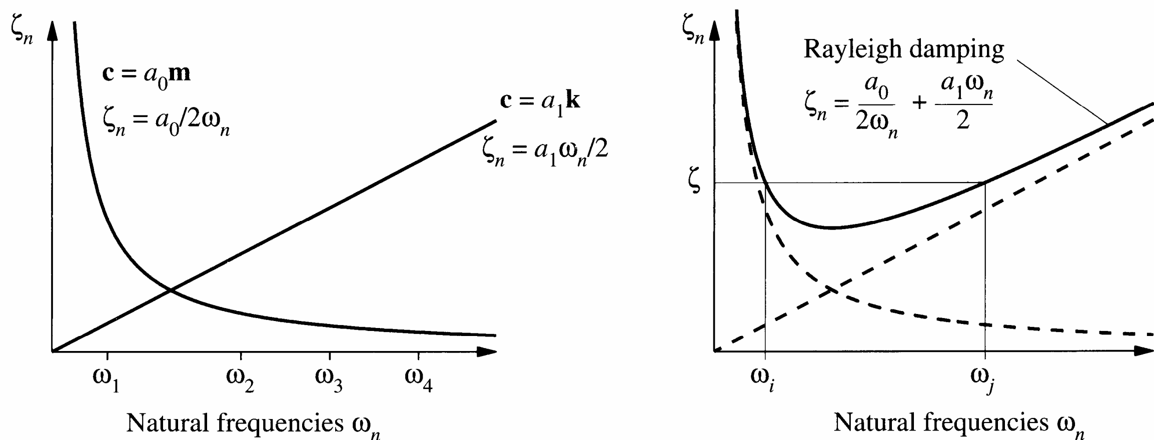


Figura 4.16. Variația amortizării modale funcție de pulsație: amortizare proporțională cu masa şi cu rigiditatea (a); amortizare de tip Rayleigh (b), Chopra, 2001.

În probleme practice, modurile i şi j se aleg astfel ca fracțiunea din amortizarea critică să reprezinte valori rezonabile în toate modurile proprii de vibrație care contribuie semnificativ la răspunsul structurii. De exemplu, dacă răspunsul sistemului MGLD se va determina pentru cinci moduri proprii, fracțiunea din amortizarea critică ζ se poate atribui modurilor 1 şi 4. Astfel, modurile 2 şi 3 vor avea o fracțiune din amortizarea critică uşor mai mică decât ζ, iar modul 5 – una uşor mai mare decât ζ. Modurile proprii mai mari decât al cincilea vor avea o fracțiune din amortizarea critică care creşte cu pulsația proprie, răspunsul acestora fiind practic eliminat din cauza unei amortizări exagerate.